Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 2

Mercredi 11 mai 2016 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[120 points]**.

2216 – 7220

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

ABCD est un quadrilatère tel que $\mathrm{AB} = 6{,}5$, $\mathrm{BC} = 9{,}1$, $\mathrm{CD} = 10{,}4$, $\mathrm{DA} = 7{,}8$ et $\mathrm{C\hat{D}A} = 90^\circ$. Trouvez $\mathrm{A\hat{B}C}$, en donnant votre réponse correcte au degré le plus près.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Note maximale : 7]

Une variable aléatoire X est normalement distribuée avec une moyenne de 3 et une variance de 2^2.

(a) Trouvez $\mathrm{P}(0 \le X \le 2)$. [2]

(b) Trouvez $\mathrm{P}(|X| > 1)$. [3]

(c) Si $\mathrm{P}(X > c) = 0{,}44$, trouvez la valeur de c. [2]

3. [Note maximale : 6]

Résolvez le système d'équations

$$\ln \frac{y}{x} = 2$$

$$\ln x^2 + \ln y^3 = 7\,.$$

4. [Note maximale : 6]

La somme du deuxième terme et du troisième terme d'une suite géométrique est 96.

La somme infinie de cette suite est 500.

Trouvez les valeurs possibles pour la raison, r.

5. [Note maximale : 6]

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $-1 < x \leq 1$.

Trouvez la fonction réciproque, f^{-1}, en indiquant son domaine et son image.

6. [Note maximale : 8]

Une entreprise produit des feuilles rectangulaires en verre dont l'aire est de 5 mètres carrés. Au cours de la fabrication de ces feuilles en verre, des imperfections surviennent au taux de $0,5$ pour 5 mètres carrés. On suppose que le nombre d'imperfections par feuille en verre suit une distribution de Poisson.

(a) Trouvez la probabilité qu'une feuille en verre choisie au hasard contienne au moins une imperfection. [3]

Les feuilles en verre sans imperfection génèrent un profit de $5\,\$$. Les feuilles en verre ayant au moins une imperfection génèrent une perte de $3\,\$$.

(b) Trouvez le profit espéré, P dollars, par feuille en verre. [3]

Cette entreprise produit également des feuilles en verre plus larges dont l'aire est de 20 mètres carrés. Le taux d'occurrence des imperfections demeure de $0,5$ pour 5 mètres carrés. Une feuille en verre plus large est choisie au hasard.

(c) Trouvez la probabilité qu'elle n'ait pas d'imperfections. [2]

7. [Note maximale : 8]

Considérez la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 4xy$.

(a) Utilisez la dérivation implicite pour montrer que $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$. [3]

La tangente à cette courbe est parallèle à l'axe des abscisses Ox au point où $x = k$, $k > 0$.

(b) Trouvez la valeur de k. [5]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. [Note maximale : 6]

Une particule se déplace de sorte que sa vitesse $v\,\mathrm{ms}^{-1}$ est liée à son déplacement s m, par l'équation $v(s) = \arctan(\sin s)$, $0 \le s \le 1$. L'accélération de la particule est $a\,\mathrm{ms}^{-2}$.

(a) Trouvez l'accélération de la particule en fonction de s. [4]

(b) En utilisant une esquisse graphique appropriée, trouvez le déplacement de la particule lorsque son accélération est de $0{,}25\,\mathrm{ms}^{-2}$. [2]

9. [Note maximale : 8]

OACB est un parallélogramme tel que $\vec{OA} = \boldsymbol{a}$ et $\vec{OB} = \boldsymbol{b}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs non nuls.

(a) Montrez que

(i) $|\vec{OC}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$;

(ii) $|\vec{AB}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$. [4]

(b) Étant donné que $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, prouvez que OACB est un rectangle. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

Une variable aléatoire continue T a pour fonction de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t\left|\sin 2t\right|}{\pi}, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = f(t)$. [2]

(b) Utilisez votre esquisse pour trouver le mode de T. [1]

(c) Trouvez la moyenne de T. [2]

(d) Trouvez la variance de T. [3]

(e) Trouvez la probabilité que T se situe entre la moyenne et le mode. [2]

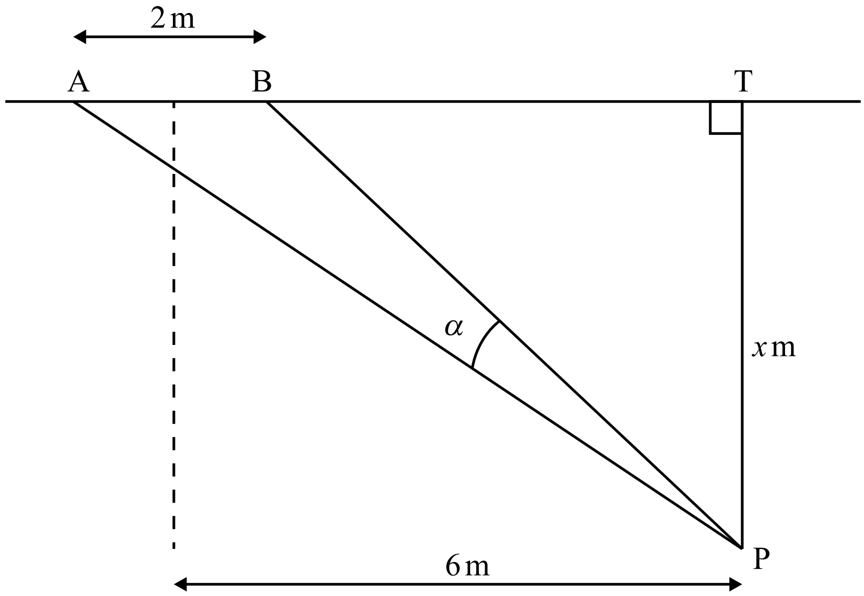
(f) (i) Trouvez $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ où $0 \le T \le \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) À partir de là, vérifiez que le quartile inférieur de T est $\dfrac{\pi}{2}$. [5]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 22]

Les points A, B et T sont sur une droite sur un terrain de foot en salle. Le but, $[\mathrm{AB}]$, mesure 2 mètres de large. Un joueur situé au point P donne un coup de pied dans le ballon en direction du but. $[\mathrm{PT}]$ est perpendiculaire à (AB) et est à une distance de 6 mètres d'une droite parallèle passant par le centre de $[\mathrm{AB}]$. Soit PT x mètres et soit $\alpha = \mathrm{A\hat{P}B}$ mesuré en degrés. Supposez que le ballon roule sur le sol.



(a) Trouvez la valeur de α quand $x = 10$. [4]

(b) Montrez que $\tan\alpha = \dfrac{2x}{x^2 + 35}$. [4]

Le maximum pour $\tan\alpha$ donne le maximum pour α.

(c) (i) Trouvez $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez la valeur de α telle que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha) = 0$.

(iii) Trouvez $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)$ et à partir de là, montrez que la valeur de α ne dépasse jamais 10°. [11]

(d) Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $\alpha \geq 7^\circ$. [3]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 23]

Les fonctions f et g sont définies par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

(a) (i) Montrez que $\dfrac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 3}$.

(ii) Utilisez la substitution $u = e^x$ pour trouver $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)} dx$. Donnez votre réponse sous la forme $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{b}$, où $a, b \in \mathbb{Z}^+$. [9]

Soit $h(x) = nf(x) + g(x)$ où $n \in \mathbb{R}, n > 1$.

(b) (i) En formant une équation du second degré en e^x, résolvez l’équation $h(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}^+$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, montrez que l’équation $h(x) = k$ admet deux solutions réelles, à condition que $k > \sqrt{n^2 - 1}$ et $k \in \mathbb{R}^+$. [8]

Soit $t(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

(c) (i) Montrez que $t'(x) = \dfrac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(ii) À partir de là, montrez que $t'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. [6]

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.